Список задач для тренировки к экзамену по математическому анализу
ВМК, 1 курс, 2023–2024 учебный год

1. Пусть множество $A = \{x_n\}$ счетно. Докажите, что существует $a \in \mathbb{R}$ такое, что $B \cap A = \emptyset$, где $B = \{x_n + a\}$ — множество, состоящее из элементов вида $x_n + a$, $x_n \in A$, $n \in \mathbb{N}$.

2. Докажите, что всякое несчетное множество содержит несчетное ограниченное подмножество.

3. Пусть последовательность $\{x_n\}$ ограничена и $x_n = y_n + z_n$, где последовательность $\{y_n\}$ возрастает, а $\{z_n\}$ убывает. Верно ли, что последовательность $\{x_n\}$ сходится? Поясните свой ответ.

4. Докажите, что если $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, то $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_n| = |a|$.

5. Приведите пример последовательности $\{x_n\}$, отличной от стационарной и такой, что $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} x_n = \inf\{x_n\}$.

6. Докажите, что из любой последовательности можно выделить монотонную подпоследовательность.

7. Пусть функции f и g определены на сегменте $[a, b]$. Докажите, что

$$\sup_{a\leqslant x\leqslant b} (f(x) + g(x)) \leqslant \sup_{a\leqslant x\leqslant b} f(x) + \sup_{a\leqslant x\leqslant b} g(x).$$

8. Пусть $f(x) = o(1)$ при $x \to a$, а $g(x) = O(f(x))$ при $x \to a$. Верно ли, что $g(x) = o(1)$ при $x \to a$? Поясните свой ответ.

9. Исследуйте на непрерывность и определите характер точек разрыва функции

$$f(x) = x \cdot \operatorname{sgn}\left(\sin\frac{1}{x}\right).$$

10. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и пусть $a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$. Докажите, что найдется точка $c \in [a, b]$ такая, что

$$f(c) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}.$$

11. Приведите пример функции, определенной во всех точках вещественной прямой и непрерывной ровно в одной точке.

12. Могут ли две непрерывные на отрезке функции быть различны только на счетном подмножестве точек этого отрезка? Поясните свой ответ.

13. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[0, 1]$, $f(0) = 1$, $f(1) = 0$. Докажите, что найдется точка $c \in [0, 1]$ такая, что $f(c) = c$.

14. Может ли произведение двух равномерно непрерывных на некотором множестве функций не являться равномерно непрерывной на этом множестве функцией? Поясните свой ответ.

15. Пусть функция $f(x)$ определена на сегменте $[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b); пусть, кроме того, $f'(x) \neq 0$ при всех $x \in (a,b)$. Верно ли, что на множестве $f([a,b])$ определена однозначная обратная функция? Верно ли обратное: если функция $f(x)$ дифференцируема на (a,b) и имеет однозначную обратную функцию на множестве $f([a,b])$, то ее производная на интервале (a,b) не обращается в ноль? Поясните свой ответ.

16. Пусть известно, что функция $x = \varphi(t)$ определена и дифференцируема в окрестности точки t_0, а функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки $x_0 = \varphi(t_0)$, но не дифференцируема в этой точке. Что можно сказать о дифференцируемости в точке t_0 сложной функции $f(\varphi(t))$? Поясните свой ответ.

17. Пусть функция $f(x)$ является четной и дифференцируемой на всей числовой прямой. Докажите, что ее производная $f'(x)$ — нечетная функция.

18. Верна ли теорема Ролля на луче, т. е. верно ли, что если функция $f(x)$ непрерывна на $[a,+\infty)$, дифференцируема на $(a,+\infty)$ и существует $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(a)$, то найдется точка $c \in (a,+\infty)$ такая, что $f'(c) = 0$? Поясните свой ответ.

19. Известно, что уравнение $x^3 + px + q$, $p, q \in \mathbb{R}$, имеет три различных вещественных корня. Докажите, что $p < 0$.

20. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b) и для любых точек x_1, $x_2 \in (a,b)$ выполнено: $|f(x_1)-f(x_2)| \leqslant \sqrt{2}|x_1-x_2|^2$. Докажите, что тогда $f(x) \equiv const$ на (a,b).

21. Вычислите $\lim\limits_{0+0}(\sin x)^x$.

22. Подберите числа a и b так, чтобы при $x \to 0$ функция $f(x) = \cos x - \dfrac{1+ax^2}{1+bx^2}$ была бесконечно малой как можно более высокого порядка малости.

23. Найдите значения параметров a, b, c, при которых выполнено асимптотическое равенство
$$e^{2x+x^2} - ax\cdot\sqrt[3]{1+bx} = 1 + cx^3 + o(x^3), \quad x \to 0.$$

24. Найдите первообразную функции $e^{-|x|}$, стремящуюся к нулю при $x \to -\infty$.

25. Найдите первообразную для функции $f(x) = |\sin x|$ на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$.